11 Isometrien

Strukturerhaltende Abbildungen:

Gruppen	–	Gruppenhomomorphismen
Ringe	–	Ringhomomorphismen
Vektorräume	–	lineare Abbildungen
eukl./unitäre VR	–	Isometrien

$\boxed{(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \text{ euklidischer/unitärer VR}}$

11.1 Def: Eine **Isometrie** auf V ist eine lineare Abb. $f: V \longrightarrow V$, für die gilt:

$$\langle f(\underline{v}), f(\underline{w})\rangle = \langle \underline{v}, \underline{w}\rangle \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

"f erhält Längen & Winkel"

Beispiele:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{um Winkel } \alpha]{\text{Rotation um Ursprung}} \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{Ursprungsgeraden}]{\text{Spiegelung an einer}} \mathbb{R}^2$$

$\Big\}$ Isometrien

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{um Winkel } \alpha]{\text{Rotation um ein } \underline{v} \neq \underline{0}} \mathbb{R}^2$$

– Keine Isometrie: nicht linear ($\underline{0} \not\mapsto \underline{0}$)

Hier und im Folgenden:

$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt 10.16

$\mathbb{C}^n := \mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt 10.17

Ziel: Alle Isometrien von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ finden.

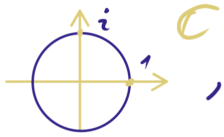
Gibt es für $\mathbb{R}^2$ mehr, als hier schon stehen?

(Nein, siehe Beispiel 11.5 unten.)

11.2 Satz:

① Alle Eigenwerte einer Isometrie haben Betrag 1.

/$\mathbb{R}$: EW $a = \pm 1$

/$\mathbb{C}$: EW $a \in$ 

, also $a = x + iy$ mit $x^2 + y^2 = 1$.

② EV zu verschiedenen EW einer Isometrie stehen senkrecht zueinander.

Beweis:

1: Sei f eine Isometrie, $\underline{v}$ EV zum EW a.

$$\langle f(\underline{v}), f(\underline{v}) \rangle = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$\langle f(\underline{v}), f(\underline{v}) \rangle = \langle a\cdot\underline{v}, a\cdot\underline{v} \rangle = |a|^2 \cdot \|\underline{v}\|^2, \qquad \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \|\underline{v}\|^2$$

Da $\underline{v} \neq \underline{0}$, ist $\|\underline{v}\| \neq 0$, und es folgt $|a|^2 = 1$.

Da $|a| \in \mathbb{R}$ und $|a| \geq 0$, folgt $|a| = 1$.

2:
$$\left.\begin{array}{l} f(\underline{v}) = a\underline{v} \\ f(\underline{w}) = b\cdot\underline{w} \\ \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle f(\underline{v}), f(\underline{w}) \rangle \end{array}\right\} \quad \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = a\cdot\overline{b}\cdot\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

Falls nicht $\underline{v} \perp \underline{w}$, falls also $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \neq 0$, folgt
$$1 = a\cdot\overline{b}.$$

Da $|a| = |b| = 1$ (nach Teil 1), folgt: $a = b$.

(Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist $\overline{z} = z^{-1}$, denn
$z\cdot\overline{z} = |z|^2 = 1$) $\square$

11.3 Satz:

Jede Isometrie eines **endlich-dim.** euklidischen/unitären VRs ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Jede Isometrie f ist injektiv nach Injektivitäts-kriterium: $f(\underline{v}) = \underline{0} \Rightarrow \|\underline{v}\| = \|f(\underline{v})\| = \|\underline{0}\| = 0$

$\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$.

Nutze nun Korollar 5.19. $\square$

11.4 Satz: Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$; $V := K^n$ mit Standardskalarprodukt. Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine ON-Basis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine ON-Basis von V.

($\overline{}$ = id für $K = \mathbb{R}$)

Beweis:

(i $\Leftrightarrow$ ii) f_A Isometrie

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \langle A \cdot \underline{v}, A \cdot \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle && \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \\
&\Leftrightarrow (\overline{A \cdot \underline{v}})^T \cdot A \cdot \underline{w} = \underline{v}^T \cdot \underline{w} && \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \\
&\Leftrightarrow \overline{\underline{v}}^T \cdot \overline{A}^T \cdot A \cdot \underline{w} = \underline{v}^T \cdot \mathbb{1}_n \cdot \underline{w} && \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \\
&\overset{\text{siehe wieder (*) in Beweis zu 10.2}}{\Leftrightarrow} \overline{A}^T \cdot A = \mathbb{1}_n \\
&\overset{\text{Satz 6.35}}{\Leftrightarrow} A \text{ invertierbar mit } \overline{A}^T = A^{-1} \\
&(\Leftrightarrow A \cdot \overline{A}^T = \mathbb{1}_n)
\end{aligned}$$

(ii $\Leftrightarrow$ iii) Sind $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ Spalten von A, gilt:

$$\overline{A}^T \cdot A = \mathbb{1}_n \Leftrightarrow \underbrace{\overline{\underline{a}_i}^T \cdot \underline{a}_j}_{\langle \underline{a}_i, \underline{a}_j \rangle} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \| \underline{a}_i \| = 1 & \forall i \text{ und} \\ \underline{a}_i \perp \underline{a}_j & \forall i \neq j \end{cases}$$

Ferner gilt nach Satz 6.36:

A invertierbar $\Leftrightarrow$ $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ Basis von V

(ii $\Leftrightarrow$ iv) analog (verwende $A \cdot \overline{A}^T = \mathbb{1}_n$) $\square$

Matrizengruppen

11.5 Def. & Satz:

Für einen beliebigen Körper K ist

Matrix-multiplikation

$$GL_n(K) := (\{A \in Mat_K(n\times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot)$$
$$= (\{A \in Mat_K(n\times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot)$$

die allgemeine lineare Gruppe über K (englisch: General Linear group), und ihre Untergruppe

$$SL_n(K) := (\{A \in Mat_K(n\times n) \mid \det(A) = 1\}, \cdot)$$

die spezielle lineare Gruppe.

$GL_n(\mathbb{R})$ besitzt u.a. folgende Untergruppen:

$$O(n) := (\{A \in Mat_{\mathbb{R}}(n\times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot)$$
$$\overset{(11.4)}{=} \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$$

– orthogonale Gruppe

$$SO(n) := O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

– spezielle orthogonale Gruppe

$GL_n(\mathbb{C})$ besitzt u.a. folgende Untergruppen:

$$U(n) := (\{A \in Mat_{\mathbb{C}}(n\times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot)$$
$$\overset{(11.4)}{=} \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}$$

– unitäre Gruppe

$$SU(n) := U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

– spezielle unitäre Gruppe

Beweis, dass es sich um Gruppen handelt:

$$GL_n(K) = \underbrace{\mathrm{Mat}_K(n \times n)}_{\text{Ring nach Korollar 6.10}}{}^{*}$$

Einheitsgruppe, siehe Def. 3.4

$$SL_n(K) = \ker\left(GL_n(K) \xrightarrow{\det} K^{*} \right)$$

Gruppenhomomorphismus nach Multiplikationssatz 8.7

$O(n) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ ist Untergruppe nach den Kriterien von Notiz 2.9:

- $\mathbb{1}_n \in O(n)$ ✓
- $A, B \in O(n)$
  $\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^T \cdot A^T \underset{6.31}{=} (A \cdot B)^T$, also
  $A \cdot B \in O(n)$
- $A \in O(n)$
  $\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} \underset{6.31}{=} (A^{-1})^T$, also $A^{-1} \in O(n)$

$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$
- Schnitt zweier Untergruppen ist stets eine Untergruppe.

$U(n)$, $SU(n)$: analog.

$\square$

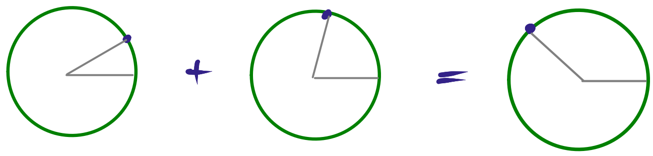
Babybeispiele:

$$GL_1(K) = K^*$$
$$SL_1(K) = \{1\}$$

$$O(1) = (\{a \in \mathbb{R} \mid |a|^2 = 1\}, \cdot)$$
$$= (\{+1, -1\}, \cdot)$$

$$SO(1) = \{1\}$$

$$U(1) = (\{a \in \mathbb{C} \mid |a|^2 = 1\}, \cdot)$$ „Kreisgruppe"



$$SU(1) = \{1\}$$

11.6 Beispiel/Lemma

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$$ ← det = 1; Rotationen um 0

$$\dot\cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$$ ← det = −1; Spiegelungen an Ursprungsgerade

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$$ (nur die Rotationen)

Insbesondere gilt: $SO(2) \cong U(1)$ als Gruppe!

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mathrel{\hat=} a + ib$$

Beweis:

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in Mat_{\mathbb{R}}(2\times 2) \;\middle|\; \begin{matrix} & a^2+b^2 = 1 & ① \\ \text{und} & c^2+d^2 = 1 & ② \\ \text{und} & ac+bd = 0 & ③ \end{matrix} \right\}$$

$$\left.\begin{matrix} |a+ib| \overset{①}{=} 1 \\ |d-ic| \overset{②}{=} 1 \end{matrix}\right\} \quad \left|\frac{a+ib}{d-ic}\right| = \frac{|a+ib|}{|d-ic|} = \frac{1}{1} = 1 \quad (a)$$

und

$$\frac{a+ib}{d-ic} = (a+ib)\cdot\overline{(d-ic)}$$
$$= (a+ib)(d+ic)$$
$$= ad - bc + i\,\underbrace{(ac+bd)}_{0 \text{ wegen } ③}$$
$$\in \mathbb{R} \quad (b)$$

Aus (a) & (b) folgt:

$$\frac{a+ib}{d-ic} = \pm 1,$$

Das sind die einzigen reellen Zahlen (b) von Betrag 1 (a).

also $\quad a+ib = \pm(d-ic),$

also $\quad \begin{cases} d = a \\ c = -b \end{cases}$ oder $\begin{cases} d = -a \\ c = b \end{cases}$

Also

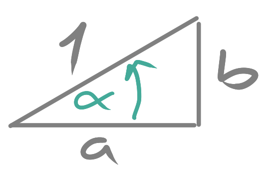
$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ldots \right\} \,\dot\cup\, \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \middle| \ldots \right\}$$

Zur geometrischen Interpretation:

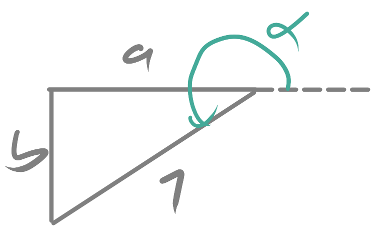
Wegen ① können wir $\alpha \in [0, 2\pi)$ wählen mit

$$a = \cos\alpha$$
$$b = \sin\alpha$$

z.B. für $a, b \geq 0$:

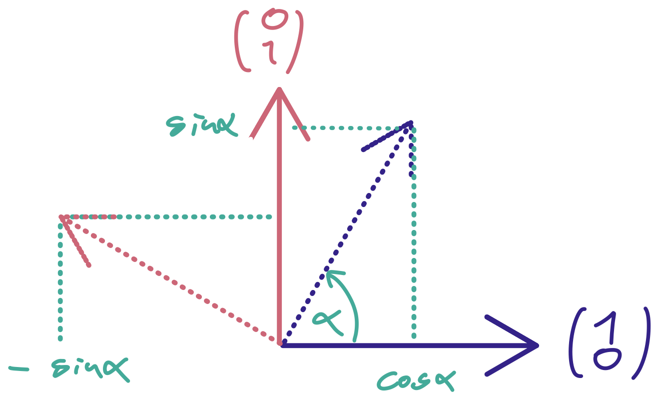


z.B. für $a, b \leq 0$:



$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \Bigg(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{matrix}}}_{\text{Bild von } \binom{1}{0}} \; \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{matrix}}}_{\text{Bild von } \binom{0}{1}} \Bigg)$$

ist Rotation um Winkel α.



$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ mit $a^2+b^2=1$

ist Spiegelung an einer Ursprungsgeraden:

$$\chi_{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}} = x^2 - a^2 - b^2 = x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1),$$

also ist Abbildung diagonalisierbar mit EW ± 1, und die EV stehen nach Satz 11.2 senkrecht aufeinander.

$\square$

Aus diesem Beispiel folgt:

Jede Isometrie von $\mathbb{R}^2$ hat bezüglich einer geeignet Basis die Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{\in SO(2)} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Fall Rotation: benutze Standardbasis

Fall Spiegelung: wähle Basis wie oben am Beweisende.

Wir zeigen jetzt, dass das auch für $\mathbb{R}^n$ mit $n>2$ gilt.

11.7 Struktursatz für euklidische Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen VRs hat bezüglich einer geeigneten ON-Basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \boxed{A_1} & \\ & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrix $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$.

Beweis benötigt etwas Vorarbeit.

11.8 Def: K Körper, V K-VR, $V \circlearrowleft f$ Endomorphismus

Ein UVR $W \subseteq V$ ist *f-stabil*, falls $f(W) \subseteq W$.

11.9 Notiz: Sei $B_W := (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$ eine Basis von W, $B := (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{b}_{k+1}, \dots, \underline{b}_n)$ eine Ergänzung zu einer Basis von V.
W ist genau dann f-stabil wenn $M_B(f)$ folgende Gestalt hat:

$M_{B_W}(f|_W)$

$$M_B(f) = \begin{array}{c} \\ k \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overset{\longleftrightarrow k}{*} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

11.10 Lemma:

Sei nun wieder $(V, \langle\,;\,\rangle)$ euklidischer/unitärer, endlich-dim. VR, $V \circlearrowleft f$ eine Isometrie.
Ist $W \subseteq V$ f-stabil so ist auch $W^\perp \subseteq V$ f-stabil.

(Wir können f also schreiben als

$$W \oplus W^\perp \xrightarrow{\begin{pmatrix} f|_W & 0 \\ 0 & f|_{W^\perp} \end{pmatrix}} W \oplus W^\perp$$
)

Beweis:

$f|_W : W \longrightarrow W$ ist Isometrie (klar), also nach Satz 11.3 Isomorphismus, also $f(W) = W$ (nicht nur $\subseteq$)

$f(W^\perp) \subseteq W^\perp$:

Sei $\underline{v} \in W^\perp$, $\underline{w} \in W$ beliebig. z.z: $\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle = 0$.

Wähle dazu $\underline{w}' \in W$ mit $f(\underline{w}') = \underline{w}$ und rechne:

$$\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle f(\underline{v}), f(\underline{w}') \rangle = \langle \underset{W^\perp}{\underset{\uparrow}{\underline{v}}}, \underset{W}{\underset{\uparrow}{\underline{w}'}} \rangle = 0 \quad ✓$$

$\square$

Lemma 11.11: Jede Isometrie f eines euklidischen VRs $V \neq \{0\}$ besitzt einen f-stabilen UVR der Dimension 1 oder 2.

Beweis:
Falls f reellen EW a besitzt, wähle EV $\underline{v}$ zu a.
Dann ist $\langle \underline{v} \rangle$ 1-dimensionaler f-stabiler UVR.

Falls f keinen reellen EW besitzt:
Nach Satz 10.21 können wir annehmen:
$V = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt.
Sei $A \in O(n)$ darstellende Matrix.
Können A auch auffassen als $A \in U(n)$.
Dann kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "\cdot A"] & \mathbb{C}^n \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cdot A"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Nach Fundamentalsatz der Algebra 3.21 besitzt $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ mindestens eine Nullstelle $s \in \mathbb{C}$.
Nach Annahme $s \notin \mathbb{R}$, also $s \neq \bar{s}$.
Wähle EV $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ zu s.
Dann ist $\bar{\underline{x}} \in \mathbb{C}^n$ EV zu $\bar{s}$:

$$A \cdot \bar{\underline{x}} = \overline{A} \cdot \bar{\underline{x}} = \overline{A \cdot \underline{x}} = \overline{s \cdot \underline{x}} = \bar{s} \cdot \bar{\underline{x}}.$$

A reell

Definiere $W_{\mathbb{C}} := \langle \underline{x}, \bar{\underline{x}} \rangle_{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{C}$-UVR von $\mathbb{C}^n$)
$W_{\mathbb{R}} := W_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$-UVR von $\mathbb{R}^n$)

$W_{\mathbb{C}}$ und $W_{\mathbb{R}}$ sind f-stabil, denn $A \cdot \langle \underline{x}, \bar{\underline{x}} \rangle_{\mathbb{C}} \subseteq \langle \underline{x}, \bar{\underline{x}} \rangle_{\mathbb{C}}$
und $A \cdot \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$

Noch zu zeigen: $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2$. ← Nicht offensichtlich! Siehe (*) unten.

$W_{\mathbb{C}}$ hat $\mathbb{C}$-Basis $B := (\underline{x}, \underline{\bar{x}})$, denn $(\underline{x}, \underline{\bar{x}})$ ist linear unabhängig.
($\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{\bar{x}} \neq \underline{0}$ und $\underline{x} \perp \underline{\bar{x}}$ nach Satz 11.2)

$W_{\mathbb{C}}$ hat alternative $\mathbb{C}$-Basis $B' := (2\,\mathrm{Re}(\underline{x}), 2\,\mathrm{Im}(\underline{x}))$:

$$2 \cdot \mathrm{Re}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{\bar{x}} = 1 \cdot \underline{x} + 1 \cdot \underline{\bar{x}}$$
$$2 \cdot \mathrm{Im}(\underline{x}) = \frac{1}{i}(\underline{x} - \underline{\bar{x}}) = -i \cdot \underline{x} + i \cdot \underline{\bar{x}}$$

Koeffizienten $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$

Also ist B' das Bild der Standardbasis E von $\mathbb{C}^2$ unter einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $j: \mathbb{C}^2 \longrightarrow W_{\mathbb{C}}$ mit ${}_B M_E(j) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$.
Wegen $\det \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = 2i \neq 0$ ist $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ invertierbar. Also ist j ein Isomorphismus und B' nach Satz 5.16 eine Basis.

Da die Vektoren aus B' in $\mathbb{R}^n$ liegen, folgt:
$W_{\mathbb{R}}$ hat $\mathbb{R}$-Basis B'. Insbesondere $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2$. $\square$

(*) Vergleiche
$$W_{\mathbb{C}} := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}^2;$$
$$W_{\mathbb{R}} := W_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Hier ist $\dim_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}} = 1$, aber $W_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2 = \{\underline{0}\}$, denn
$$(a+ib)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \iff a = b = 0,$$
also $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 0$.

Beweis zu Struktursatz 11.7:

Sei $f \circlearrowleft V$ Isometrie. Induktion über $\dim V$.

IA: $\dim V = 0$ ✓

$\dim V = 1$: folgt aus Satz 11.2 oder Beispiel $O(1) = \{\pm 1\}$.

$\dim V = 2$: Beispiel/Lemma 11.6

IV: Satz gilt für euklidische VR W der Dimension $\dim W < \dim V$.

IS: Nach Lemma 11.11 existiert f-stabiler UVR W; $\dim W = 1$ oder $\dim W = 2$.
Nach Lemma 11.10 ist auch $W^\perp$ f-stabil.
Wähle Basen von W und $W^\perp$ und setze sie zu Basis von V zusammen.
Bezüglich dieser Basis hat f darstellende Matrix der Form:

$$W \oplus W^\perp \xrightarrow{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}} W \oplus W^\perp$$

Wende nun IV auf A & B an. $\square$

Ähnlich (aber viel einfacher) lässt sich zeigen:

11.12 Struktursatz für unitäre Isometrien:

Jede Isometrie eines endlich-dim. unitären VRs wird bezüglich einer geeigneten ON-Basis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$; $|a_i| = 1$.